# Estructura i dinàmica galàctica
# Parèntesis de Poisson

Estudiant: Sergi Blanco Cuaresma

25 de gener de 2011

**Resum**

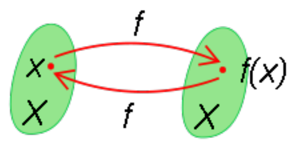
Exercici de demostració matemàtica per a un cas concret (funcions en involució i parèntesis de Poisson) presentat a classe d'Estructura i dinàmica galàctica.

## Índex

# 1 Involució

Una involució o funció involutiva és una funció matemàtica que és la seva pròpia inversa:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x\ \forall x\epsilon Dom \tag{1}$$




# 2 Integral primera

Com a recordatori matemàtic, per a un sistema ordinari d'equacions diferencials:

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i\left(x,y_1,...,y_n\right)\ per\ i=1,...,n \tag{2}$$

Una integral primera, integral del moviment o constant del moviment és una funció de coordenades generalitzades i moments conjugats (o equivalentment de posicions i velocitats) que és constant durant tota la trajectòria del sistema:

$$\phi\left(x,y_1,...,y_n\right)=Constant \tag{3}$$

Si es coneixen $k$ integrals primeres d'un sistema, llavors l'ordre aquest pot ser reduït en $k$ unitats integrant l'equació de Hamilton-Jacobi

# 3 Parèntesis de Poisson

Considerem una funció $F=F\left(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t\right)$ amb $q_i$ i $p_i$ com a coordenades i moments generalitzats. La seva derivada respecte al temps serà:

$$\frac{dF}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q_i}+\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p_i}\right)+\frac{\partial F}{\partial t} \tag{4}$$

Donat que les coordenades i moments generalitzats són solucions de les equacions de Hamilton $\dot{q_j}=\frac{\partial H}{\partial p_j}$ i $\dot{p_j}=\frac{\partial H}{\partial q_j}$ a on $H$ és el Hamiltonià, llavors:

$$\frac{dF}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial F}{\partial t} \tag{5}$$

D'aquí s'extrau que els parèntesis de Poisson de dos funcions a l'espai de fase respecte a les variables canòniques conjugades es defineix com:

$$[F, H] = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{6}$$

Per tant, l'equació (5) quedaria:

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{7}$$

En aquest sentit, per a que una funció $F$ sigui una integral primera es requereix que

$$[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

Per tant, $F$ és integral primera si:

1. $F$ no depèn del temps $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$
2. Els parèntesis de Poisson s'anul·la $[F, H] = 0$, per tant $F$ i $H$ es troben en involució mútua.

## 3.1 Propietats

1. Antisimetria: $[F, H] = -[H, F]$, en conseqüència $[F, F] = 0$.
2. $[H, \alpha] = 0$ a on $\alpha$ és una magnitud que no depèn explícitament de $q_i$ i/o $p_i$
3. Linealitat: $[\alpha F + \beta G, H] = \alpha [F, H] + \beta [G, H]$ a on $\alpha$ i $\beta$ són magnituds que no depenen explícitament de $q_i$ i/o $p_i$
4. Regla de Leibniz: $[u, vw] = [u, v] w + v [u, w]$ i $[uv, w] = [v, w] u + v [u, w]$
5. Derivada parcial respecte al temps: $\frac{\partial}{\partial t} [u, v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right]$
6. Identitat de Jacobi $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$, per tant si $u$ i $v$ són integrals primeres, llavors $[u, v]$ també ho serà.

Si $H$ és el hamiltonià, la combinació de la propietat 1 ($[H, H] = 0$) amb la derivada respecte al temps segons l'equació (7):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{9}$$

El que implica que $H$ és integral primera sempre i quan no depengui explícitament del temps (sistema autònom).

# 4 El·lipsoide perfecte

## 4.1 Equacions del moviment

A l'article "de Zeeuw, T. (1985). *Elliptical galaxies with separable potencials.* MNRAS. 216, 273-334" s'especifica que el potencial gravitatori en un el·lipsoide perfecte es pot representar per:

$$V = -\frac{F(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} - \frac{F(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} - \frac{F(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} \tag{10}$$

a on:

- $F(\tau) = (\tau+\alpha)(\tau+\gamma)\,G(\tau)$ amb $G(\tau) = \pi G \varrho_0 abc \int_0^\infty \frac{\sqrt{u-\beta}}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\gamma)}} \cdot \frac{du}{u+\tau}$.
- $\lambda, \mu, \nu$ són les coordenades el·lipsoidals
- $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ són constants que satisfan la inequació $-\gamma \leq \nu \leq -\beta \leq \mu \leq -\alpha \leq \lambda$

Les equacions del moviment de les òrbites estel·lars en un el·lipsoide perfecte es poden representar per:

$$p_\tau^2 = \frac{\tau^2 E - \tau j + k + F(\tau)}{2(\tau+\alpha)(\tau+\beta)(\tau+\gamma)} \tag{11}$$

a on $\tau = \lambda, \mu, \nu$.

Les constants $j$ i $k$ que apareixen a les equacions del moviment són valors de dos integrals primeres $J$ i $K$ que existeixen al potencial de Stäckel a més de l'energia total $H = E$:

$$H = X + Y + Z \tag{12}$$

$$J = (\mu+\nu)X + (\nu+\lambda)Y + (\lambda+\mu)Z \tag{13}$$

$$K = \mu\nu X + \nu\lambda Y + \lambda\mu Z \tag{14}$$

a on $X$, $Y$ i $Z$ són:

$$X = \frac{p_\lambda^2}{2P^2} - \frac{F(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} \tag{15}$$

$$Y = \frac{p_\mu^2}{2Q^2} - \frac{F(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} \tag{16}$$

$$Z = \frac{p_\nu^2}{2R^2} - \frac{F(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} \tag{17}$$

i per altra banda:

$$P^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4(\lambda+\alpha)(\lambda+\beta)(\lambda+\gamma)} \tag{18}$$

$$Q^2 = \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4(\mu+\alpha)(\mu+\beta)(\mu+\gamma)} \tag{19}$$

$$R^2 = \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4(\nu+\alpha)(\nu+\beta)(\nu+\gamma)} \tag{20}$$

## 4.2 Demostració integrals primeres i involució

Donats els parèntesis de Poisson:

$$[J,H] = \sum_\tau \left( \frac{\partial J}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial p_\tau} - \frac{\partial J}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial p_\tau} \right) \tag{21}$$

$$[K,H] = \sum_\tau \left( \frac{\partial K}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial p_\tau} - \frac{\partial K}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial p_\tau} \right) \tag{22}$$

$$[J,K] = \sum_\tau \left( \frac{\partial J}{\partial \tau}\frac{\partial K}{\partial p_\tau} - \frac{\partial J}{\partial \tau}\frac{\partial K}{\partial p_\tau} \right) \tag{23}$$

Si $J, K, H$ són integrals primeres i es troben en involució llavors $[H,J] = [J,K] = [K,H] = 0$ donat que:

1. Si J i K son integrals primeres, llavors:
   (a) $[J,H] = 0$ i $[K,H] = 0$ segons requisit (8).
   (b) $[J,K] = Constant$:
      i. Per la propietat 6 dels parèntesis de Poisson (identitat de Jacobi): $[J,[K,H]] + [K,[H,J]] + [H,[J,K]] = 0$
      ii. Com anteriorment s'ha establert que $[J,H] = 0$ i $[K,H] = 0$, llavors: $[J,0] + [K,0] + [H,[J,K]] = 0$
      iii. Per tant la identitat de Jacobi es simplifica a: $[H,[J,K]] = 0$
      iv. Com a conseqüència de la propietat 2 dels parèntesis de Poisson, s'obté finalment: $[J,K] = Constant$
2. Si J i K estan en involució mútua, llavors $[J,K] = 0$

Demostració de $[H,J] = [J,K] = [K,H] = 0$ pel cas concret de les $J, K, H$ definides a l'apartat anterior:
$[J,H] = \sum_\tau \left( \frac{\partial J}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial p_\tau} - \frac{\partial J}{\partial p_\tau}\frac{\partial H}{\partial \tau} \right) = \left( \frac{\partial J}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial J}{\partial p_\lambda}\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) + \ldots + (\ldots)$

$= \left( (\mu+\nu) \frac{\partial X}{\partial \lambda} + Y + (\nu+\lambda) \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + Z + (\lambda+\mu) \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} - \left( (\mu+\nu) \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} (\mu+\nu-\mu-\nu) + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} (\nu+\lambda-\mu-\nu) + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} (\lambda+\mu-\mu-\nu) + Y + Z \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} (\lambda-\mu) + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} (\lambda-\nu) + Y + Z \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \left( \frac{p_\mu^2}{2Q^2} - \frac{F(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)^2} \right) (\lambda-\mu) + \left( \frac{p_\nu^2}{2R^2} - \frac{F(\nu)}{(\nu-\lambda)^2(\nu-\mu)} \right) (\lambda-\nu) + Y + Z \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \frac{Y}{(\mu-\lambda)} (\lambda-\mu) + \frac{Z}{(\nu-\lambda)} (\lambda-\nu) + Y + Z \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \frac{-Y}{(\mu-\lambda)} (\mu-\lambda) + \frac{-Z}{(\nu-\lambda)} (\nu-\lambda) + Y + Z \right) + \dots = 0 + \dots$

A on la resta de termes s'anul·len de forma equivalent.

Pel següent cas:

$[K,H] = \sum_\tau \left( \frac{\partial K}{\partial \tau} \frac{\partial H}{\partial p_\tau} - \frac{\partial K}{\partial p_\tau} \frac{\partial H}{\partial \tau} \right) = \left( \frac{\partial K}{\partial \lambda} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial K}{\partial p_\lambda} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) + \dots + (\dots)$

$= \left( (\mu \cdot \nu) \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \nu Y + (\nu \cdot \lambda) \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \mu Z + (\lambda \cdot \mu) \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} - \left( \mu\nu \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} (\mu\cdot\nu-\mu\cdot\nu) + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} (\nu\cdot\lambda-\mu\cdot\nu) + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} (\lambda\cdot\mu-\mu\cdot\nu) + \nu Y + \mu Z \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} (\nu\cdot(\lambda-\mu)) + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} (\mu\cdot(\lambda-\nu)) + \nu Y + \mu Z \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \left( \frac{p_\mu^2}{2Q^2} - \frac{F(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)^2} \right) (\nu\cdot(\lambda-\mu)) + \left( \frac{p_\nu^2}{2R^2} - \frac{F(\nu)}{(\nu-\lambda)^2(\nu-\mu)} \right) (\mu\cdot(\lambda-\nu)) + \nu Y + \mu Z \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \frac{Y}{(\mu-\lambda)} (\nu\cdot(\lambda-\mu)) + \frac{Z}{(\nu-\lambda)} (\mu\cdot(\lambda-\nu)) + \nu Y + \mu Z \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( \frac{-Y\cdot\nu}{(\lambda-\mu)} (\lambda-\mu) + \frac{-Z\cdot\mu}{(\lambda-\nu)} (\lambda-\nu) + \nu Y + \mu Z \right) + \dots = 0 + \dots$

De nou, la resta de termes s'anul·len de forma equivalent.

Finalment, en quant a $[J,K]$:

$[J,K] = \sum_\tau \left( \frac{\partial J}{\partial \tau} \frac{\partial K}{\partial p_\tau} - \frac{\partial J}{\partial \tau} \frac{\partial K}{\partial \tau_i} \right) = \left( \frac{\partial J}{\partial \lambda} \frac{\partial K}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial J}{\partial p_\lambda} \frac{\partial K}{\partial \lambda} \right) + \dots + (\dots)$

$= \left( (\mu+\nu) \frac{\partial X}{\partial \lambda} + Y + (\nu+\lambda) \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + Z + (\lambda+\mu) \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right) \left( \mu\nu \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \right)$

$- \left( (\mu+\nu) \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \right) \left( (\mu\cdot\nu) \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \nu Y + (\nu\cdot\lambda) \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \mu Z + (\lambda\cdot\mu) \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} ($

$(\mu\nu + (-\mu-\nu)\nu) Y + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} ((\nu+\lambda)\mu\cdot\nu + (-\mu-\nu)\nu\cdot\lambda)$

$+ (\mu\nu + (-\mu-\nu)(-\mu)) Z + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} ((\lambda+\mu)\mu\cdot\nu + (-\mu-\nu)\cdot\lambda\cdot\mu)$

$) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( -\nu^2 Y + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \left( \mu\cdot\nu^2 - \nu^2\cdot\lambda \right) - \mu^2 Z + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \left( \mu^2\cdot\nu - \lambda\cdot\mu^2 \right) \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( -\nu^2 Y + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \left( \nu^2\cdot(\mu-\lambda) \right) - \mu^2 Z + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \left( \mu^2\cdot(\nu-\lambda) \right) \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( -\nu^2 Y + \left( \frac{p_\mu^2}{2Q^2} - \frac{F(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)^2} \right) \left( \nu^2\cdot(\mu-\lambda) \right) - \mu^2 Z + \left( \frac{p_\nu^2}{2R^2} - \frac{F(\nu)}{(\nu-\lambda)^2(\nu-\mu)} \right) \left( \mu^2\cdot(\nu-\lambda) \right) \right) + \dots$

$= \frac{\partial X}{\partial p_\lambda} \left( -\nu^2 Y + \frac{Y}{(\mu-\lambda)} \left( \nu^2 \cdot (\mu - \lambda) \right) - \mu^2 Z + \frac{Z}{(\nu-\lambda)} \left( \mu^2 \cdot (\nu - \lambda) \right) \right) + \ldots = 0 + \ldots$

A on també la resta de termes s'anul·len de forma equivalent.

## Referències


[1] de Zeeuw, T. (1985). *Elliptical galaxies with separable potencials.* MNRAS. 216, 273-334.

[2] Soldovieri, T. (2010). *Introducción a la mecànica de Lagrange y Hamilton.* Universidad del Zulia.

[3] Wikipedia. *Corchetes de Poisson.* Obtingut a Gener 16, 2011 des de la World Wide Web: http://foro.migui.com/smf/index.php?topic=11527.0

[4] Foro física clasica. *Paréntesis de Poisson.* Obtingut a Gener 16, 2011 des de la World Wide Web: http://es.wikipedia.org/wiki/Corchete_de_Poisson