Estructura i dinàmica galàctica
Formes especials de les coordenades el·lipsoidals

Estudiant: Sergi Blanco Cuaresma

16 de gener de 2011

Resum

Exercici sobre l'el·lipsode perfecte presentat a l'article "de Zeeuw, T. (1985). *Elliptical galaxies with separable potencials.* MNRAS. 216, 273-334", les famílies d'òrbites possibles i casos especial (principalment $\alpha = \beta$).

Índex

1 Coordinades el·lipsoidals **2**
1.1 Casos especials 4
1.1.1 Cas $\beta = \gamma$ 4
1.1.2 Cas $\alpha = \beta$ 5
1.1.3 Cas $\alpha = \beta = \gamma$ 6

2 L'el·lipsoide perfecte **7**
2.1 Distribució de densitat 7
2.2 Potencial gravitatori 7

3 Òrbites estel·lars **7**
3.1 Equacions del moviment 7
3.2 Integrals 8
3.3 Classificació de les òrbites 8

4 Classificació d'òrbites límit **9**

1 Coordinades el·lipsoidals

Sent (x, y, z) les coordenades cartesianes, es defineixen les coordenades el·lipsoidals (λ, μ, ν) com les tres arrels per τ de:

$$\frac{x^2}{\tau+\alpha}+\frac{y^2}{\tau+\beta}+\frac{z^2}{\tau+\gamma}=1 \tag{1}$$

a on α, β i γ són constants a on $\alpha < \beta < \gamma$. Les tres arrels satisfan la inequació $-\gamma \leq \nu \leq -\beta \leq \mu \leq -\alpha \leq \lambda$.
La relació entre coordenades cartesianes i el·lipsoidals:

$$x^2=\frac{(\lambda+\alpha)(\mu+\alpha)(\nu+\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \tag{2}$$

$$y^2=\frac{(\lambda+\beta)(\mu+\beta)(\nu+\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \tag{3}$$

$$z^2=\frac{(\lambda+\gamma)(\mu+\gamma)(\nu+\gamma)}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)} \tag{4}$$

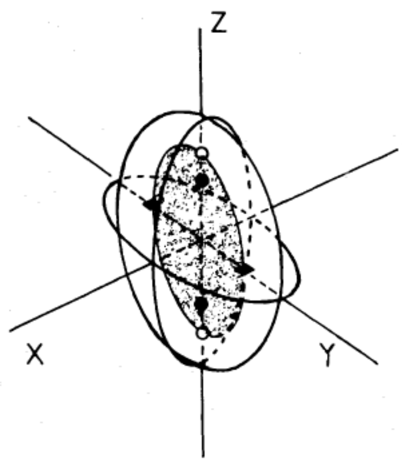
$$\lambda+\mu+\nu=-\alpha-\beta-\gamma+x^2+y^2+z^2 \tag{5}$$

$$\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-(\beta+\gamma)\,x^2-(\gamma+\alpha)\,y^2-(\alpha+\beta)\,z^2 \tag{6}$$

$$\lambda\mu\nu=-\alpha\beta\gamma+\beta\gamma x^2+\gamma\alpha y^2+\alpha\beta z^2 \tag{7}$$

Efecte de la variacions dels valors de les coordenades el·lipsoidals:

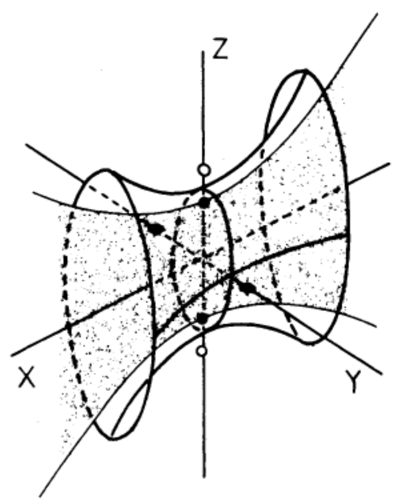
1. Paràmetre λ: El·lipsoides
   (a) Grans λ generen el·lipsoides més esfèrics
   (b) Com més petit λ, es generen el·lipsoides més triaxial amb l'eix llarg en la direcció Z i l'eix curt en la direcció X.
   (c) L'el·lipsoide degenera per $\lambda = -\alpha$ a on a l'eix X té una longitud zero (zona ombrejada)



2. Paràmetre μ: Hiperboloide d'un full al voltant de l'eix X

   (a) Com més petit μ, es generen hiperboloides més reduïts per l'eix Y

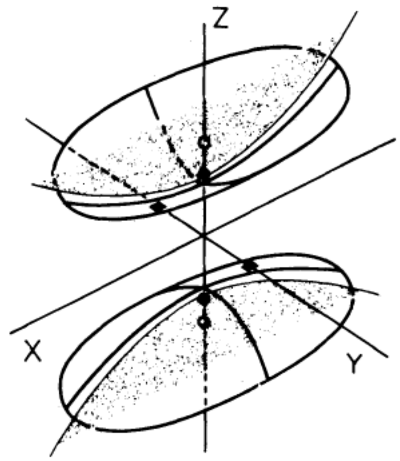
   (b) L'hiperboloide degenera per $\mu = -\beta$ a on a l'eix Y té una longitud zero (zona ombrejada):



3. Paràmetre ν: Hiperboloide oberts de dos fulls al voltant de l'eix Z

   (a) Com més petit ν, els fulls de l'hiperboloide s'apropen al pla Z=0

   (b) L'el·lipsoide degenera per $\nu = -\gamma$ a on coincideixen els fulls amb el pla Z=0.



Per cada punt (x, y, z) existeix un el·lipsoide λ, un hiperboloide d'un full μ i un hiperboloide de dos fulls ν. Cadascuna d'aquestes superfícies són perpendicular en aquest punt.

1.1 Casos especials

Si dos o més de les constants α, β i γ coincideixen (inicialment havíem considerat $\alpha < \beta < \gamma$), llavors les coordenades el·lipsoidals prenen formes especials:

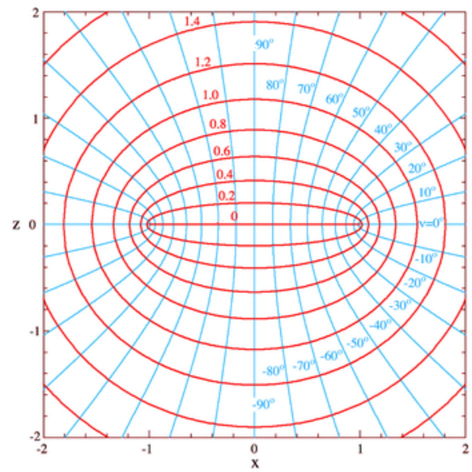
1.1.1 Cas $\beta = \gamma$

Les coordenades el·lipsoides podran tenir valors entre els rangs:$-\gamma = \nu = -\beta \leq \mu \leq -\alpha \leq \lambda$. Per tant, corresponen a coordenades oblades esferoïdals (λ, μ, χ).

- Per λ constant, es genera un esferoide oblat amb l'eix curt en la direcció X.
- Per μ constant, es generen hiperboloides al voltant de l'eix X.

En el cas de ν, el seu rang de possibles valors és només zero i per tant no pot ser utilitzat com a coordenada. No obstant, l'hiperboloide de dos fulls al voltant de l'eix Z seran ara plans que passen per l'eix X, per tant es possible utilitzar un angle azimutal χ:

- Per χ constant, (λ, μ) són coordenades el·líptiques (creuament el·lipsis i hipèrboles):



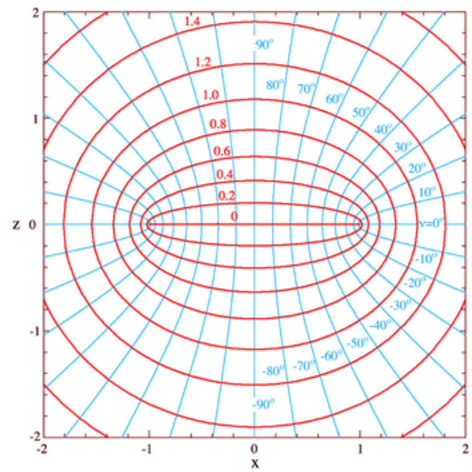
1.1.2 Cas $\alpha = \beta$

Les coordenades el·lipsoides podran tenir valors entre els rangs:$-\gamma \leq \nu \leq -\beta = \mu = -\alpha \leq \lambda$. Per tant, de forma equivalent al cas especial anterior, corresponen a coordenades prolades esferoïdals (λ, ϕ, ν).

- Per λ constant, es genera un esferoide prolat amb l'eix llarg en la direcció Z.
- Per ν constant, es generen hiperboloides de dos fulls al voltant de l'eix Z.

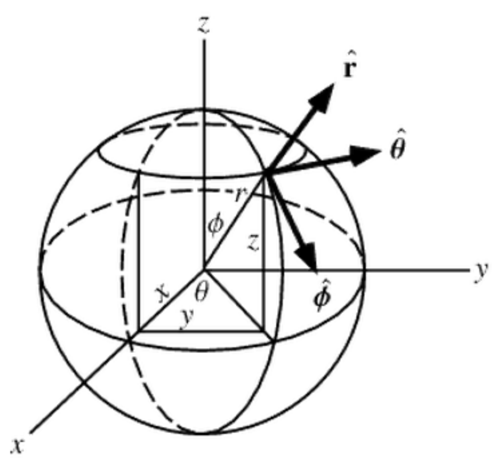
En el cas de μ, el seu rang de possibles valors és només zero i per tant no pot ser utilitzat com a coordenada. No obstant, els hiperboloides d'un full al voltant de l'eix X són ara plans que passen per l'eix Z, per tant es possible utilitzar un angle azimutal ϕ:

- Per ϕ constant, (λ, ν) són coordenades el·líptiques (creuament el·lipsis i hipèrboles):



1.1.3 Cas $\alpha = \beta = \gamma$

Les coordenades el·lipsoides podran tenir valors entre els rangs:$-\gamma = \nu = -\beta = \mu = -\alpha \leq \lambda$. Òbviament, μ i ν perden el seu sentit i les coordenades es converteixen en esfèriques (r, θ, ϕ) a on $r = \sqrt{\lambda + \alpha}$.



Relació amb coordenades cartesianes:

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cos(\phi) \tag{8}$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \sin(\phi) \tag{9}$$

$$x = r \cdot \cos(\theta) \tag{10}$$

2 L'el·lipsoide perfecte

2.1 Distribució de densitat

La distribució de densitat ve determinada per:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{(1+\tilde{m}^2)} \tag{11}$$

a on $\tilde{m}^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ per $a \geq b \geq c \geq 0$.

- La densitat es troba estratificada en el·lipsoides amb semieixos $\tilde{m}a$, $\tilde{m}b$ i $\tilde{m}c$, sent l'eix llarg en la direcció X i el curt en la direcció Z.
- La densitat central ésϱ_0.
- La massa a en un radi $\tilde{m}$ és $M(\tilde{m}) = 2\pi abc\varrho_0 \left\{ \arctan(\tilde{m}) - \frac{\tilde{m}}{1+\tilde{m}^2} \right\}$
- La massa total és $M = \pi^2 abc\varrho_0$
- El radi de la massa mitja és $\tilde{m} = 2.264437$

2.2 Potencial gravitatori

El potencial gravitatori es pot representar per:

$$V = -\frac{F(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} - \frac{F(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} - \frac{F(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} \tag{12}$$

a on $F(\tau) = (\tau+\alpha)(\tau+\gamma)G(\tau)$ amb $G(\tau) = \pi G\varrho_0 abc \int_0^\infty \frac{\sqrt{u-\beta}}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\gamma)}} \cdot \frac{du}{u+\tau}$.
Cal destacar que els casos especials vistos a la secció 1.1 deriven en expressions de potencials gravitatoris més simples. Per exemple, pel cas $\alpha = \beta$ o $a = b > c$ (esferoide oblat):

$$V(\lambda,\nu) = -\frac{(\lambda+\gamma)G(\lambda) - (\nu+\gamma)G(\nu)}{\lambda-\nu} \tag{13}$$

a on $G(\tau) = 2\pi G\varrho_0 a^2 \sqrt{\frac{\gamma}{\tau+\gamma}} \arctan\sqrt{\frac{\tau+\gamma}{-\gamma}}$ per $\tau = \lambda, \nu$ amb $\gamma = -c^2$

3 Òrbites estel·lars

3.1 Equacions del moviment

Les equacions del moviment es poden representar per:

$$p_\tau^2 = \frac{\tau^2 E - \tau j + k + F(\tau)}{2(\tau+\alpha)(\tau+\beta)(\tau+\gamma)} \tag{14}$$

a on $\tau = \lambda, \mu, \nu$

3.2 Integrals

Les constants j i k que apareixen a les equacions del moviment són valors de dos integrals primeres J i K que existeixen al potencial de Stäckel a més de l'energia total $H = E$. Qualsevol funció de H, J i K serà també una integral primera, per tant, amb l'objectiu de simplificar es farà ús de I_2 i I_3 en comptes de J i K:

$$I_2 = \frac{\alpha^2 H + \alpha J + K}{\alpha - \gamma} \tag{15}$$

$$I_3 = \frac{\gamma^2 H + \gamma J + K}{\gamma - \alpha} \tag{16}$$

Conseqüentment, en termes dels valors i_2 i i_3 de les integrals I_2 i I_3, les equacions del moviment es representaran per:

$$p_\tau^2 = \frac{(\tau+\alpha)(\tau+\gamma)E - (\tau+\gamma)i_2 - (\tau+\alpha)i_3 + F(\tau)}{2(\tau+\alpha)(\tau+\beta)(\tau+\gamma)} \tag{17}$$

a on $\tau = \lambda, \mu, \nu$

3.3 Classificació de les òrbites

Per un valors determinats de E, i_2 i i_3 de les integrals primeres H, I_2 i I_3, una òrbita existira si i només si tots tres p_λ^2, p_μ^2 i p_ν^2 tenen valors positius per unes coordenades λ, μ, ν determinades.

Per cadascuna de les coordenades, el moviment pot ser:

- Oscil·latori si $p_\tau^2 = 0$
- Rotatori si $p_\tau^2 > 0$

Les combinacions d'oscil·lacions i rotacions que tenen lloc a les tres coordenades, depenen dels valors de E, i_2 i i_3 i aquests determinaran la família a la que pertany l'òrbita.

Per tal d'estudiar sistemàticament totes les combinacions de E, i_2 i i_3, es convenient reescriure l'equació del moviment:

$$p_\tau^2 = \frac{E - i_2/(\tau+\alpha) - i_3/(\tau+\gamma) + G(\tau)}{2(\tau+\alpha)} \tag{18}$$

per $\tau = \lambda, \mu, \nu$ amb $G(\tau)$ definit a la secció 2.2 a la pàgina anterior.

Si s'aïlla l'energia de l'equació anterior s'obté:

$$E = 2(\tau+\beta)p_\tau^2 + V_{eff}(\tau) \tag{19}$$

amb el potencial efectiu $V_{eff}(\tau) = \frac{i_2}{\tau+\alpha} + \frac{i_3}{\tau+\gamma} - G(\tau)$

Cal destacar que el moviment està permès ($p_\tau^2 > 0$) per valors de λ, μ, ν que satisfan

$$E \leq V_{eff}(\lambda) \tag{20}$$

$$E \leq V_{eff}(\mu) \tag{21}$$

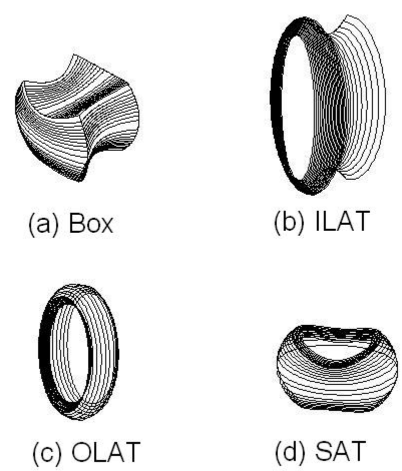
$$E \leq V_{eff}(\nu) \tag{22}$$

Pels casos especials vistos a la secció 1.1, les equacions de moviment es redueixen a formes conegudes i s'estableix una relació entre I_2, I_3 i els moments angulars integrals. Per exemple, pel cas $\alpha = \beta$ (esferoide oblat):

- El moment angular paral·lel a l'eix Z L_z és una integral primera.
- Un cop $\mu = -\beta = -\alpha$ ha sigut establert s'obté $I_2 = \frac{1}{2}p_\phi^2 = \frac{1}{2}L_z^2$ a on $p_\phi = \varpi\dot{\phi} - y\dot{x}$ és el moment conjugat a ϕ
- Per altra banda, I_3 és la coneguda tercera integral de *Galactic Dynamics*.
- El moviment està permès per valors de λ, ν que satisfan $E \leq V_{eff}(\lambda)$ i $E \leq V_{eff}(\nu)$.

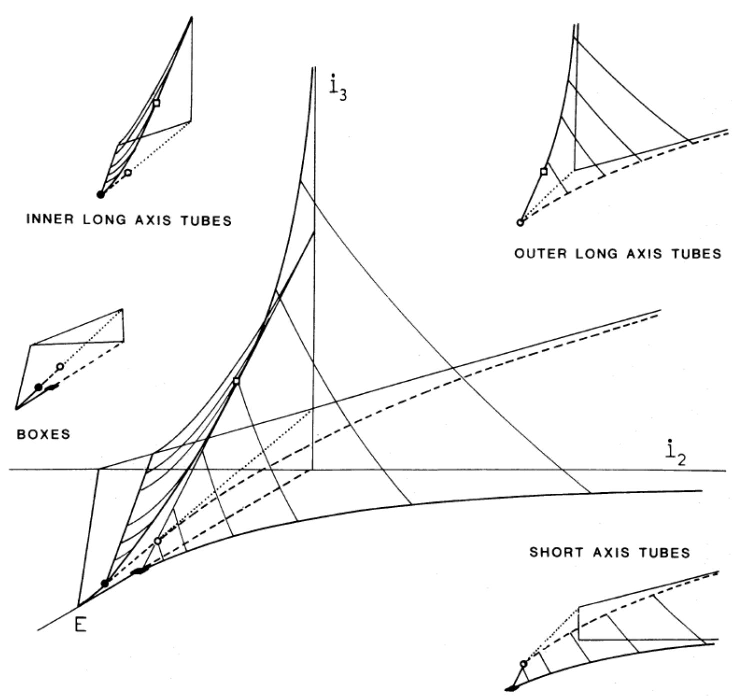
4 Classificació d'òrbites límit

Les òrbites es troben classificades en les següents famílies:



1. Descripció numèrica de les famílies:
   (a) *Boxes*
      i. Paràmetres: $i_2 < 0$, $i_3 > 0$ i $V_{eff}(-\beta) < E < 0$
      ii. Coordenades permeses:$-\gamma \leq \nu \leq \nu_{max}$, $-\beta \leq \mu \leq \mu_{max}$ i $-\alpha \leq \lambda \leq \lambda_{max}$
   (b) *Inner Long Axis Tubes*
      i. Paràmetres: $i_2 < 0$, $i_3 > 0$ i $V_{eff}(\mu_0) < E < V_{eff}(-\beta)$
      ii. Coordenades permeses:$-\gamma \leq \nu \leq -\beta$, $\mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{max}$ i $-\alpha \leq \lambda \leq \lambda_{max}$
   (c) *Outer Long Axis Tubes*
      i. Paràmetres: $i_2 > 0$, $i_3 > 0$ i $V_{eff}(\lambda_0) < E < V_{eff}(-\beta)$
      ii. Coordenades permeses:$-\gamma \leq \nu \leq -\beta$, $\mu_{min} \leq \mu \leq -\alpha$ i $\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$
   (d) *Short Axis Tubes*
      i. Paràmetres: $i_2 < 0$, $i_3 > 0$, $V_{eff}(\lambda_0) < E < 0$ i $V_{eff}(-\beta) < E < 0$
      ii. Coordenades permeses:$-\gamma \leq \nu \leq \nu_{max}$, $-\beta \leq \mu \leq -\alpha$ i $\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$

Representació en tres dimensions de la relació de valors possibles E, i_2 i i_3 per cada tipus de família:



De nou, pels casos especials vistos a la secció 1.1, l'estructura de les orbites es veuen simplificades. Per exemple, pel cas $\alpha = \beta$ o $a = b > c$ (esferoide oblat) només tenen lloc òrbites de la família *Short Axis Tubes*.

Referències

[1] de Zeeuw, T. (1985). *Elliptical galaxies with separable potencials.* MNRAS. 216, 273-334.

[2] Scholarpedia (2010). *Galactic dynamics.* Obtingut a Gener 16, 2011 des de la World Wide Web: http://www.scholarpedia.org/article/Galactic_dynamics#Orbits_in_triaxial_galaxies