Estructura i dinàmica galàctica
Invariants integrals

Estudiant: Sergi Blanco Cuaresma

26 de gener de 2011

Resum

Breu introducció a la mecànica Lagrangiana i Hamiltoniana i resum de les seccions sobre invariants integrals i multiplicadors de Jacobi dels llibres "A treatise on analytical dynamics" (L. A. Pars) i "Theory of Orbits: Integrable systems and non-perturbative methods" (Dino Boccaletti, Giuseppe Pucacco).

Índex

1 Mecànica Lagrangiana **2**

2 Mecànica Hamiltoniana **2**

3 Transformació canònica **3**

4 Sistema autònom **3**

5 Invariants integrals **3**
- 5.1 Sistema dinàmic Hamiltonià 3
- 5.2 Definició d'invariant integral 3
- 5.3 Teorema de Liouville 4
- 5.4 Teorema de Poincaré 4

6 Multiplicadors de Jacobi **4**
- 6.1 Propietats 5

7 Integral primera **5**

1 Mecànica Lagrangiana

La mecànica Lagrangiana permet reformular la mecànica Newtoniana en termes més generals, a on si es possible treballar fàcilment amb sistemes de referència no inercials[1]

El Lagrangià $L = L(q, \dot{q}, t) = T - V$ és una funció temporal a partir de la qual es poden obtenir propietats del sistema físic (p.ex. evolució temporal). Es troba constituït per l'energia cinètica $T = \frac{1}{2}\sum m_i \cdot v_i^2$ i potencial del sistema V (si forces conservatives[2], $F = -\nabla V \Rightarrow V_B - V_A = \int_A^B F \cdot dr$ a on r és el vector posició) formulat amb coordenades i velocitats generalitzades (q_j, $\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial t}$ i el temps t). Les coordenades corresponen als graus de llibertat del sistema a on el total és el número de variables menys el número de lligadures (*constraints*) que relacionen les variables (p.ex. moviments limitats a una esfera).

La integral del Lagrangià en el temps t identifica la trajectòria que minimitza l'acció entre dos configuracions a on cadascuna està representada per q_j, $\dot{q}_j$ a l'espai de fase.

Cal destacar que per un sistema no té perquè existir un únic Lagrangià.

Mitjançant el Lagrangià es defineixen les N equacions del moviment de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad 1 \leq j \leq n \tag{1}$$

En aquest sentit, les incògnites de les N equacions diferencials de segon ordre són $q(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$

2 Mecànica Hamiltoniana

El principi Hamiltonià exposa que per tot moviment cinemàtic que pot donar-se entre dues configuracions en un interval de temps, el moviment que es dona és aquell que minimitza (fa estacionari) la integral de temps del Lagrangià del sistema.

La transformada de Legrende s'utilitza per derivar la formulació Hamiltoniana a partir del Lagrangià. La forma Hamiltoniana consta de 2N incògnites $q_j(t)$ i $p_j(t)$ a on aquest últim és el moment generalitzat $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ per $1 \leq j \leq n$.

El Hamiltonià correspon a $H(q, p, t) = \dot{q} \cdot p - L(q, \dot{q}, t)$ i les 2N equacions diferencials de primer ordre $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ i $\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}$ per $1 \leq j \leq n$. Per tant, respecte a la mecànica Lagrangiana, es redueix l'ordre de les equacions diferencials però s'incrementa el seu número. Segons el cas, pot ser més interessant una formulació que l'altre per tal de resoldre el problema.

[1] Sistemes a on la variació del moment lineal del sistema ($p = m \cdot v$) no equival al total de forces reals sobre el mateix ($p_2 - p_1 \neq \sum F_n$), per exemple per l'existència de forces fictícies (de difícil determinació) originades per lligadures físiques (gas en un contenidor) o moviments accelerats entre dos sistemes de referència (rotació de la terra i moviment de les estrelles).

[2] Exemple de força no conservativa: fricció.

3 Transformació canònica

S'entén per transformació canònica el canvi de coordenades de l'espai de fase q_ii p_i a$\tilde{q}_i$i $\tilde{p}_i$ conservant l'estructura de les equacions de Hamilton (invariant canònic) amb un nou Hamiltonià $\tilde{H}\left(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t\right)$.

L'objectiu d'una transformació és que el Hamiltonià sigui cíclic per alguna de les seves variables o que totes les coordenades siguin cícliques (p.ex. q_i no apareix al Hamiltonià i per tant $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$). D'aquesta forma es poden simplificar les 2N equacions diferencials de primer ordre de Hamilton.

4 Sistema autònom

Un sistema és autònom si no depèn del temps, per tant per qualsevol moviment el Hamiltonià es conserva ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) i en conseqüència es pot expressar en una forma més simple $H\left(q, p\right)$.

Només existeix un camí que passa per cadascun dels punts a l'espai de fase.

5 Invariants integrals

5.1 Sistema dinàmic Hamiltonià

Per a la definició d'invariants integrals a la següent secció, es treballarà bàsicament amb sistemes dinàmics hamiltonians, sent aquest un conjunt de 2N equacions diferencials de primer ordre:

$$\dot{q_j} = \frac{dq_j}{dt} = X_j\left(q_j, p_j, t\right) \tag{2}$$

$$\dot{p_j} = \frac{dp_j}{dt} = X_{n+j}\left(q_j, p_j, t\right) \tag{3}$$

Per $1 \leq j \leq n$.

Si el sistema és autònom, es pot utilitza una de les x_i com a variable independent i obtenir $n-1$ equacions:

$$\dot{q_j} = \frac{dq_j}{dq_1} = X_j\left(q_j, p_j\right) \tag{4}$$

$$\dot{p_j} = \frac{dp_j}{dq_1} = X_{n+j}\left(q_j, p_j\right) \tag{5}$$

5.2 Definició d'invariant integral

Considerarem un sistema autònom per simplicitat, a on les funcions $X_i\left(q_j, p_j\right)$ són C^1 (diferenciables 1 cop) i les solucions seran funcions C^2:

$$x_i = \varphi_i\left(q_1^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0\right) \tag{6}$$

A on les constants $q_1^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0$ indiquen els valors $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ que corresponen a un valor fix inicial de temps, per exemple $t = 0$.

Les equacions (4) i (5) descriuen el moviment d'un punt amb coordenades $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$ en un espai n-dimensional. Per un conjunt de punts ocupant una regió r-dimensional ($r \leq n$) denominada Ω_0 a $t = 0$, els mateixos punts a temps t ocuparan una regió Ω_t també r-dimensional. Si la integral r-dimensional d'una funció F a la regió Ω_0 manté el seu valor per qualsevol t:

$$\int_{\Omega_0} F d\Omega = \int_{\Omega_t} F d\Omega \, \forall t \tag{7}$$

Llavors la integral es considerada invariant del sistema d'ordre r. Per tant, una invariant integral és qualsevol integral associada a l'espai de fase que es mantingui constant durant el moviment del sistema, és a dir, per totes les coordenades canòniques[3].

5.3 Teorema de Liouville

Segons el teorema de Liouville, el volum ocupat per les regions Ω_0 i Ω_t és equivalent per tot sistema Hamiltonià:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \tag{8}$$

a on $x_1 = q_1, ...x_n = q_n, x_{n+1} = p_1, ..., x_n = p_n$.

5.4 Teorema de Poincaré

El teorema de la recurrència de Poincaré ens indica que si el camí de tots el punts d'una regió es troba dintre d'una zona limitada de l'espai de fase per a tot el temps, llavors els punts retornaran eventualment a aquesta regió en un temps $t > 0$. Per tant,

$$I_1 = \int_{\gamma_t} \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \tag{9}$$

és una invariant integral lineal a on γ_t són els punts d'una corba en un temps t.

6 Multiplicadors de Jacobi

Es denominen multiplicadors de Jacobi a les funcions $M\left(x_1, ..., x_m\right)$ que satisfan l'equació diferencial lineal $\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial (M X_1)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial (M X_m)}{\partial x_m} = 0$ per un sistema autònom d'N equacions $\frac{dx_i}{dt} = X_i\left(x_1, ..., x_n, t\right)$.

[3]Les transformades canòniques es defineixen com aquelles que conserven les equacions de Hamilton

Al cas dels sistemes autònoms d'N-1 equacions $\frac{dx_{n-1}}{dx_1} = X_{n-1}(x_2, ..., x_n)$, els multiplicadors de Jacobi $M(x_1, ..., x_m)$ satisfan l'equació diferencial $\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial(MX_m)}{\partial x_m} = 0$.

6.1 Propietats

Per simplicitat, es considerarà el sistema autònom:

1. Si és possible trobar una expressió explícita $X(x_1, ..., x_n)$ per un volum específic V, llavors $\frac{1}{X}$ es un multiplicador.
2. Si és possible trobar dos multiplicador independents M_1 i M_2, els seu rati $\frac{M_1}{M_2}$ és una integral primera (veure secció 7) del sistema d'equacions diferencials (M_1V i M_2V es mantenen constants, per tant $\frac{M_1}{M_2}$ també).
3. Si la variació de volum és zero, llavors $M = 1$ és un multiplicador i l'extensió de l'espai en si mateix es un invariant integral: $I = \int M \cdot dx_1 \cdot dx_2 ... \cdot dx_m$
4. Si $m = 2$, els multiplicadors són factors integrants de l'equació $X_2 dx_1 - X_1 dx_2 = 0$
5. Per a una transformació de variables $y_r = F_r(x_1, ..., x_m)$ a on $r = 1, 2, ..., m$ i F_r és de classe C_2 al domini D de x i el Jacobi $J = \frac{\partial(y_1, ..., y_m)}{\partial(x_1, ..., x_m)}$no es devaneix a D. Llavors, si M es un multiplicador del sistema original, $M' = M \cdot J$ serà un multiplicador pel sistema transformat.

7 Integral primera

Com a recordatori matemàtic, per a un sistema ordinari d'equacions diferencials:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n) \; per \, i = 1, ..., n \tag{10}$$

Una integral primera, integral del moviment o constant del moviment és una funció de coordenades generalitzades i moments conjugats (o equivalentment de posicions i velocitats) que és constant durant tota la trayectora del sistema:

$$\phi(x, y_1, ..., y_n) = Constant \tag{11}$$

Si es coneixen k integrals primeres d'un sistema, llavors l'ordre aquest pot ser reduït en k unitats integrant l'equació de Hamilton-Jacobi.

Referències

[1] Pars, L. A. (1965). *A treatise on analytical dynamics.* University of Virginia.

[2] Boccaletti, D., Pucacco, G. (1996). *Theory of Orbits: Integrable systems and non-perturbative methods.* Springer.

[3] Soldovieri, T. (2010). *Introducción a la mecànica de Lagrange y Hamilton.* Universidad del Zulia.